

XIX Межрегиональная олимпиада школьников по математике и криптографии

Задачи для 11 класса

Задача 1

Известно, что число $N = 202718099$ является произведением двух простых чисел p и q , а количество натуральных чисел, меньших N и взаимно простых с N , равно 202687920. Найдите числа p и q .

Задача 2

Торговые автоматы в Криптоландии принимают монетки номиналом только в 3 и 7 единиц. Укажите все цены, которые нельзя устанавливать на товары, продаваемые через автоматы подобного вида. Автоматы сдачу не дают.

Задача 3

Известно, что три числа a_1, a_2, a_3 были получены следующим образом. Сначала выбрали натуральное число A и нашли числа $A_1 = [A]_{16}$, $A_2 = [A/2]_{16}$, $A_3 = [A/4]_{16}$, где $[X]_{16}$ – остаток от деления целой части числа X на 16 (например, $[53/2]_{16} = 10$). Затем было выбрано целое число B такое, что $0 \leq B \leq 15$. Числа A_1, A_2, A_3 и B записывают в двоичной системе счисления, т.е. представляют каждое из них в виде цепочки из 0 и 1 длины 4, приписывая слева необходимое число нулей. Такие цепочки условимся складывать посимвольно «в столбик» без переносов в следующий разряд согласно правилу: $1+1=0+0=0$ и $0+1=1+0=1$, а саму операцию посимвольного сложения обозначим символом \oplus . Например, $3 \oplus 14 = (0011) \oplus (1110) = (1101) = 13$. Положим $a_1 = A_1 \oplus B$, $a_2 = A_2 \oplus B$, $a_3 = A_3 \oplus B$. Найдите все возможные значения числа a_3 , если известно, что $a_1 = 4$, $a_2 = 10$.

Задача 4

Для зашифрования сообщения на русском языке, записанного без знаков препинания и пробелов, используется последовательность натуральных чисел x_1, x_2, \dots, x_K , удовлетворяющая соотношению: $x_k = b \cdot 8^{a(k-1)}$, $k = 1, 2, \dots, K$. Здесь a и b – фиксированные (но неизвестные) натуральные числа. Зашифрование производится следующим образом. Первую букву сообщения заменяют числом согласно таблице 1 и складывают с x_1 . Потом также заменяют вторую букву и складывают с x_2 и т.д. Затем все суммы заменяют остатками от деления на 31, а остатки заменяют буквами согласно таблице

А	Б	В	Г	Д	Е	Ё	Ж	З	И	Й	К	Л	М	Н	О	П	Р	С	Т	У	Ф	Х	Ц	Ч	Ш	Щ	Ы	Ь	Ъ	Э	Ю	Я
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30		

В результате получился текст

ОЯФПРПЯФБКПЩСЪИЖЪИЯЫСЯЗТХЖУТНАЖБСЁНФВГМНУТУЁШЖФН

Найдите исходное сообщение, представляющее собой отрывок известного стихотворения, если известно, что в нем есть слово **РАВНИНЫ**.

Задача 5

Все 16 городов Криптоландии в качестве названий имеют различные четырехразрядные комбинации, состоящие из нулей и единиц (например, «0011»). Все города попарно соединены непересекающимися дорогами, причем проезд из одного города в другой стоит столько криптов, в скольких разрядах различаются их имена (например, из «0011» в «1001» – 2 криптов). Путешественник, находящийся в «0000», хочет объехать все города страны и вернуться назад за минимальную цену. Как ему это сделать?

Задача 6

Найти число решений системы уравнений $\begin{cases} x + |y| = 1 \\ y + a|x| = 2 \end{cases}$ при всех возможных значениях параметра a .